

基于 Markov 场的二值图象复原算法*

陈 嵘 刘小军 邹谋炎

(中国科学院电子学研究所, 北京 100080)

摘 要 提出了一种新的二值图象复原算法, 算法基于 Markov 场模型。算法在象素值的更新上采用了寻找极大似然解的方法, 同时引入了概率接受机制, 通过计算接受函数来判定是否接受新值。算法具有很高的计算效率, 在复原中取得了良好的效果。

关键词 软判据接受算法 图象复原 二值图象 Markov 场

0 引 言

二值图象复原有着广泛的应用, 如指纹图象的预处理, 文本图象复原等。图象复原总是基于特定的图象模型。本文的算法基于 Markov 场图象模型^[1-5], 其核心在于认为图象中每一象素的值, 如灰度值, 类别标记, 颜色等, 仅由其邻域内象素的值所决定。这是一维 Markov 性在二维的一种推广。Markov 随机场不仅是对自然界一类图象的合理描述, 而且因其与 Gibbs 场的等价性, 在计算上有一定的便利性, 这使得 Markov 场得到了广泛的应用。

基于 Markov 随机场的复原算法将原图象看成是一个 Markov 场, 以此作为先验知识来进行最大后验概率密度估计。如何进行最大后验概率密度估计的计算是复原的关键之一^[1,2,6]。模拟退火算法可以完成这一计算, 但计算量非常大。S. Geman 与 D. Geman 提出了 Gibbs 采样算法^[1], 通过局部化的概率抽取来逐步优化联合分布, 从而减小了计算量, 但其计算量仍然较大。ICM 算法^[2]通过逐元计算局部化极大似然来进行优化, 计算量大大减小, 其不足在于容易陷入局部极值点。本文提出了一种新算法。称为软判据接受法。算法在象素值的更新上采用了寻找极大似然解的方法, 同时通过计算接受函数以概率方式来判断是否接受新值。软判据接受法算法具

有 ICM 算法的计算效率, 同时具有模拟退火算法的全局收敛性, 在复原中取得了良好的效果。

在本文中, 假定原图象为二值图象, 但降质图象是多值的。复原算法中充分利用了原图象是二值的这一先验知识, 从而大大提高了计算速度, 类似的工作尚未见报导。

1 图象复原问题的描述

将原图象记为 X^0 , 其支持域 S_0 为 $N_0 \times N_0$, 而观测图象记为 Y , 其支持域 S 为 $N \times N$ 。 Y_s 表示 Y 中的象素, 一种常用的降质模型为:

$$Y_s = (\kappa X^0)_s + w_s, \quad s \in S \quad (1)$$

其中 κ 为点扩展函数 (PSF), w_s 为噪声, 上式可用矩阵形式表达,

$$Y = KX^0 + W \quad (2)$$

其中, Y, W 为 $N^2 \times 1$ 的矢量, X^0 为 $N_0^2 \times 1$ 的矢量, 而 K 为 $N^2 \times N_0^2$ 的降晰矩阵。

最大后验概率密度 (MAP) 复原方法是指寻找一个估计 X^* 能最大化关于 X 的后验概率分布 $P(X = x | Y = y)$, 由贝叶斯公式

$$P(X = x | Y = y) = \frac{P(Y = y | X = x)P(X = x)}{P(Y = y)} \quad (3)$$

最大化上式等价于

$$\max \{ \ln P(X = x) + \ln P(Y = y | X = x) \} \quad (4)$$

* 本文工作受国家自然科学基金 (No. 69672001) 支持

收稿日期: 1998-04-20; 收到修改稿日期: 1998-09-07

其中 $\ln P(Y = y | X = x)$ 项由图象的降质过程决定, 而 $\ln P(X = x)$ 则对应图象的先验知识。

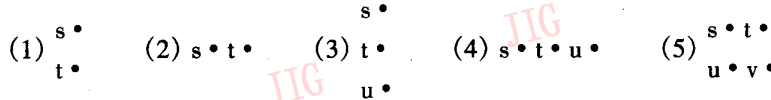
2 Markov 随机场图象模型

记 $L = \{(i, j) : 1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2\}$ 表示一幅图象, 其中象素 (i, j) 从 $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_M\}$ 中取值, 对二值图象, $M = 2$ 。 X_{ij} 为象素 (i, j) 所对应的随机变量, X 为图象所对应的随机场。 Markov 随机场图象模型认为图象 X 具有以下特性:

- (1) 正概率性, 如果每个 X_{ij} 的发生概率 $P(X_{ij}) > 0$, 则图象象元的联合概率 $P(X) > 0$ 。
- (2) Markov 性, $P(X_s = x_s | X_r = x_r, r \neq s) = P(X_s = x_s | X_r = x_r, r \in \eta_s)$ 。

其中 η_s 是象素 s 的邻域。邻域这一概念用于表达图象中象素之间的作用距离, 通常使用的邻域可以用欧氏距离来表达, 即 $\eta_{ij} = \{(k, l) : 0 < (k - i) + (l - j) \leq d\}$, $d = 1, 2$ 分别对应一阶、二阶邻域。

为了表达象素之间的作用关系, 引入簇这一概念。 (L, η) 上的一个簇, 以 c 标记, 是 L 上的一个子



记

$$D_c(X) = \begin{cases} x_s - x_t & c = 1, 2 \\ x_s - 2x_t + x_u & c = 3, 4 \\ x_s - x_t - x_u + x_v & c = 5 \end{cases} \quad (8)$$

$$\phi(\gamma) = -1/(1 + |\gamma|) \quad (9)$$

则能量函数 $U(x) = \sum_c \Phi(D_c(X)/\Delta) \quad (10)$

其中 Δ 为一参数, 用于控制平滑度的强弱。

本文中, X 的先验分布以上述的随机场来表达^[2], 则

$$\ln P(X = x) \propto - \sum_c \Phi(D_c(X)/\Delta) \quad (11)$$

当 w 为满足均值为 0 的高斯白噪声时,

$$\ln P(Y = y | X = x) \propto - \sum_{i \in S} (Y_i - (\kappa X)_i)^2 \quad (12)$$

因此最大化 (4) 式等价于

$$\min \{ \sum_c \Phi(D_c(X)/\Delta) + \lambda \sum_{i \in S} (Y_i - (\kappa X)_i)^2 \} \quad (13)$$

记

$$H(X) = \sum_c \phi(D_c(X)/\Delta) + \lambda \sum_{i \in S} (Y_i - (\kappa X)_i)^2 \quad (14)$$

3 软判决接受算法

应用 Markov 场进行图象复原的关键一步在于如何

集, 满足(1) c 包含单个象素, (2) 对 $(i, j) \neq (k, l)$, $(i, j) \in c$ 且 $(k, l) \in c$ 意味着 $(i, j) \in \eta_k$ 。记 C 为所有 c 组成的集合。

Hammersley-Clifford 定理^[3,7] 指出了 Markov 场与 Gibbs 场的等价性。定理为: X 是 L 上一个对于邻域系统 η 的 Markov 场, 当且仅当 $\pi(X) = P(X = x)$ 是一个对于 η 的 Gibbs 分布。即 X 的联合分布函数具有以下形式

$$P(X = x) = Z^{-1} \cdot e^{-U(x)/t} \quad (5)$$

其中, $U(x) = \sum_{c \in C} V_c(x)$ 称为能量函数, $V_c(x)$ 称为与 c 相关的势函数, $Z = \sum_x e^{-U(x)/t}$ 称为配分函数, t 为温度。

可以推得:

$$P(X_s = x_s | X_r = x_r, r \neq s) = Z_s^{-1} \cdot \exp[-(\sum_{c: s \in c} V_c(x))/t] \quad (6)$$

$$Z_s = \sum_{x \in Q} \exp[-(\sum_{c: s \in c} V_c(x^s))/t] \quad (7)$$

D.Geman 与 G. R yonlds 在文献[6]中引入了一类势函数, 其优点是不仅能有助于克服反卷积问题的病态, 并且可以在一定程度上保持棱边, 这种模型定义在二阶邻域系统上, 簇的类型是:

进行(13)式的优化计算。模拟退火算法(SA)是一种方法, 使用 Metropolis 抽样的 SA 算法是对联合概率作按象元的随机试验, 并以概率方式接收新象元值, 并实施退火过程。原则上说, SA 算法可以得到全局极小点, 但其计算量非常大。

另一种算法为 Gibbs 采样算法。Gibbs 采样算法是按象元根据局部化的条件概率进行随机数抽取, 从而优化联合概率。Gibbs 采样算法也是一类退火算法, 但比 SA 算法要快。不过 Gibbs 采样算法要求退火过程中实现按条件概率抽取随机数, 这使其计算量仍然很大。

ICM 算法没有退火过程, 通过逐元的最大化条件概率 $P(X_s = x_s | X_r = x_r, r \neq s)$ 实现象元值更新, 算法对整幅图象更新若干次以达到收敛。ICM 算法是一种确定性的算法, 往往会落入局部极值点, 但计算效率很高, 因而被广泛使用^[2,8]。

本文提出一种新的算法, 称为软判决接受法, 描述如下:

- (1) 随机地选取初始点 $X(0) = (X_1(0), \dots, X_N(0))$;
- (2) 以确定性(如行扫描)方法或随机地抽取一点 $X_s(k)$;

(3) 计算对应于每一个灰度级 q_m 的 $H(X)$, 记为 U_m ;

(4) 比较 $U_m (1 \leq m \leq M)$, 选择出最小的 U_{\min} 及最大的 U_{\max} ;

(5) 取 ξ 为 $[0, 1]$ 之间的随机数, 若 $1 - (1 - M^{-1}) \exp(U_{\min} - U_{\max}) > \xi$, 则接受 U_{\min} 所对应的 q_m 为 $X_i(k+1)$ 的新值, 否则拒绝。

(6) 重复(2), 直到整幅图象上所有象素都被更新一遍, 完成 $X(k)$ 到 $X(k+1)$ 的转移。

(7) 重复(2)—(5)过程直到算法收敛, 得到图象 X^* 。

新算法的思想是: 在决定 $X_n(t+1)$ 的取值时, 首先寻找最可能出现的 q_m 。从(5)式可以看出, U_m 越小, 则对应的 $P(X=x)$ 越大。因此 U_{\min} 对应的值为 X_i 的极大似然估计。同时考虑各状态之间相对大小, 差值 $U_i = U_{\min} - U_{\max}$ 越大, 则取 q_m 的概率越大。如在二值图象的情况时, 每个象素的取值为 0 或 1, 考虑两种情况:

- (1) $U_0 = 0.5, U_1 = 0.4$;
- (2) $U_0 = 0.9, U_1 = 0.1$ 。

按 ICM 算法新值均为 1, 两种情况无法区别; 而按新算法, (2) 中新值取 1 的概率要大于 (1), 这是符合实际情况的。现在考虑两种特殊的情况:

(1) $U_{\min} = U_{\max}$, 此时各状态对应的能量函数相等, 系统可取其中任一状态, 而接受函数 $1 - (1 - M^{-1}) \exp(U_{\min} - U_{\max})$ 为 M^{-1} , 即等概率接受各状态。

(2) $U_{\min} \ll U_{\max}$, 此时系统有明显的能量最小态, 对应 U_{\min} 所对的 q_m , 而此时接受函数为 1, 即以概率 1 接受 q_m 。算法的物理意义是明确的。

在本算法中, 每一步 X_i 的更新均有可能取能量较大的状态值, 新算法通过概率接受, 可以跳出局部极值点, 同时与 SA 算法及 Gibbs 采样算法相比, 新算法的计算量要小得多。计算效率接近 ICM 算法。

关于计算时间, 在文献[9]中指出: 一般来说, SA 要比 ICM 算法高两个数量级, ICM 算法几分钟可完成的复原, SA 要 1—2 小时。而根据作者的实验, ICM 算法与新算法在计算时间上几乎是相同的。

在图象复原时, ICM 算法在边界处较易出错, 例如对下面所示的情况:

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ 1.0 & \times & 0.1 \\ 0.8 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

应用第 2 节中的 Markov 场模型, 此时 $U_0 = -5.67, U_1 = -4.77$, 中心象元取 0 或 1 都是合理的。但在 ICM 算法中, 中心象元是不可能取 1 的。而在新算法中, 取 1 的概率为 0.2, 这体现了新算法的优越之处。

值得指出的是, 在 ICM 算法中, 如果采用确定性方法进行抽取, 则抽取的顺序往往会影响结果, 而新算法受抽取顺序的影响不大。

4 实验及结果

对一幅 128×128 的图象进行复原, 采用的点扩展函数为:

$$\kappa = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

噪声为均值为 0 的高斯白噪声。复原中, 参数 Δ 用于控制平滑度的强弱。一般 Δ 的值在 1.0 至 3.0 之间选取, 实验中 $\Delta = 1.0$ 。参数 λ 对于复原结果影响较大, 最优 λ 的估计有多种方法, 如均值场法, EM 法, 而一般用区间法即可。区间法先选取一组 λ , 用这些 λ 分别对图象进行复原, 由于均方误差函数是单调的, 较好的复原图象所对应的 λ 构成一个区间, 不断细划这样的区间, 即可找到最优的 λ 。实验中, 迭代次数为 5 次, 最大值、最小值的寻优方法为顺序比较寻优, 如采用函数寻优, 速度将更快。表 1 给出了实验结果。表 1 中实验用的图象为图 1(a) 所示的叶子图象。表 1 中, SNR 为信噪比, $MSE = \sum_{(i,j)} (X^*(i,j) - X(i,j))^2 / (N_0 \times N_0)$ 。从结果看, 新算法的复原质量要比 ICM 算法提高 10%—20%, 而计算时间则相当。图 1 所示为叶子图象复原实例, 对应的 $SNR = 4.3dB, \lambda = 0.001$ 。图 2 所示为文本图象复原实例, 对应的 $SNR = 3.7dB, \lambda = 0.0008$, 其中从图 1 和图 2 可以看出, 复原结果相当理想。

表 1 实验结果

SNR (dB)	MSE (降质图)	MSE (ICM 复原)	MSE (新算法)	λ	ICM 时间 (s)	新算法时间 (s)
10	228	28.57	24.49	0.01	1	1
7.8	277	60.18	52.06	0.002	1	1
4.3	394	140.8	126.53	0.001	1	1



图1 叶子图象复原实验结果



图2 文本图象复原实验结果

5 结论

本文提出了一种新的基于 Markov 场的复原算法。算法效果好,计算快。实验证明了其有效性。下一步的工作是将新算法推广于多值图象及参数估计上。

参考文献

- 1 Geman S, Geman D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images. *IEEE Trans Pattern Anal Machine Intell*, 1984, 6:721 ~ 741.
- 2 Besag J. On the statistical analysis of dirty pictures. *J Roy Stat Soc B*, 1986, 48:259 ~ 302.
- 3 Besag J. Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems (with discussion). *J Roy Stat Soc B*, 1974,36:192 ~ 326.
- 4 Levitan E, Chan M, Herman G. Image-Modeling Gibbs Priors. *Graphical Models and Image Processing*, 1995,57:117 ~ 130.
- 5 Cross and Jain. Markov random fields texture models. *IEEE Trans Pattern Anal. Machine Intell*, 1983,5(1).

- 6 Geman D, Reynolds G. Constrained Restoration and the Recovery of Discontinuities *IEEE Trans Pattern Anal Machine-Intell*, 1992,14:367 ~ 383.
- 7 Derin H, Elliot H. Modeling and segmentation of noisy and textured images using Gibbs random fields. *IEEE Trans Pattern Anal Machine Intell*, 1987,9:39 ~ 55.
- 8 Winkler. *Image analysis. Random Fields and Dynamic Monte Carlo Methods*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.
- 9 Bouman C, Liu Bede. Multiple Resolution Segmentation of Textured Images *IEEE Trans Pattern Anal Machine Intell*, 1991,13:99 ~ 113.
- 10 Smith A, Roberts G. Bayesian Computation Via Gibbs Sampler and Related Markov Chain Monte Carlo Methods. *J Roy Stat Soc B*, 1993,55(1):3 ~ 23.



陈 嶸 1996年毕业于东南大学。现在中国科学院电子研究所攻读硕士学位。研究兴趣为信号与图象处理。



刘小军 1995 至 1998 年于华北工学院分获学士、硕士学位, 现在中国科学院电子研究所攻读博士学位。研究兴趣为信号与图象处理。



邹谋炎 1963 年毕业于成都电讯工程学院, 1987 年在德国埃尔兰根-纽伦堡大学获得工学博士学位, 现为中国科学院电子研究所研究员, 博士生导师。研究兴趣为信号与图象处理。

Binary Image Restoration Based on MRF

Chen Rong, Liu Xiaojun and Zou Mouyan

(*Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080*)

Abstract In this paper, a new binary image restoration algorithm is proposed, which is based on Markov Random Fields. This algorithm finds the ML solution in the procedure of pixel value updating. The mechanism of probability acceptance is introduced to judge the transition of pixel value by computing the acceptance function. Its computation efficiency is very high. Good results are gained in the experiments.

Keywords Soft-criterion acceptance algorithm, Image restoration, Binary image, MRF